INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1986. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations :

Dans tout le problème on considère :

$I = [x_0, x_1]$ un intervalle de $\mathbb{R}$,

$E = \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$,

$C = \{ v \in E / \forall (x, x') \in I^2, x \leqslant x' \Rightarrow v(x) \leqslant v(x') \}$

l'ensemble des fonctions continues croissantes de I dans $\mathbb{R}$,

et $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est, de plus, strictement concave par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire telle que :

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \forall x \in I \quad \forall \lambda \in]0,1[\quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \\ y_1 \neq y_2 \Rightarrow F(x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) > \lambda F(x, y_1) + (1-\lambda) F(x, y_2). \end{cases}$$

On définit alors une application de E dans $\mathbb{R}$ en posant pour tout $v \in E$:

$$\text{(1)} \qquad \Phi(v) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, v(x))\, dx .$$

Le but du problème est de montrer que, sous certaines conditions, l'application Φ admet un maximum unique sur l'ensemble C et de caractériser ce maximum.

I

On pose, pour tout $v \in E$: (2) $\quad \| v \| = \sup_{x \in I} | v(x) |$

1° Montrer que :

a. L'application $v \to \| v \|$ est une norme sur E ;

b. E, muni de cette norme, est un espace de BANACH ;

c. L'application Φ est définie et continue sur E pour la norme définie par (2) ;

d. L'application Φ est strictement concave, c'est-à-dire :

$\forall \lambda \in]0,1[\quad \forall (v_1, v_2) \in E^2$

$v_1 \neq v_2 \Rightarrow \Phi(\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2) > \lambda \Phi(v_1) + (1-\lambda) \Phi(v_2)$;

e. C est un sous-ensemble fermé de E, et que C est un cône convexe, c'est-à-dire :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall (v_1, v_2) \in C^2 \quad (\alpha v_1 + \beta v_2) \in C$.

2° On fait désormais l'hypothèse suivante :

$$\text{(B)} \qquad \exists M > 0 / \forall x \in I \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} F(x, y) = \max_{|y| < M} F(x, y).$$

Montrer que :

a. Pour tout $x \in I$, l'application partielle $y \longrightarrow F(x, y)$ admet un maximum unique.

Ce maximum est atteint en un point y noté $v_0(x)$.

b. L'application de I dans $\mathbb{R}$, $x \longrightarrow v_0(x)$ est continue sur I. (On pourra utiliser, après l'avoir démontré, le résultat suivant :

Soit (X, d) un espace métrique compact, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle n'a qu'une valeur d'adhérence.)

c. Φ admet un maximum unique sur E, atteint pour $v = v_0$.

3° On se restreint désormais à l'ensemble C.

Montrer que :

a. $\sup_{v \in C} \Phi(v) < +\infty$.

b. $\sup_{v \in C} \Phi(v) = \sup_{v \in C_M} \Phi(v)$

où : $C_M = \{ v / v \in C, \ \forall x \in I \ |v(x)| \leqslant M \}$

c. La borne supérieure est atteinte en, au plus, un élément $v^* \in C$ (on ne cherchera pas à démontrer que cette borne supérieure est atteinte).

4° On postule l'existence d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C_M qui converge simplement vers une fonction $\bar{v} \in E$, et qui est telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(v_n) = \sup_{v \in C} \Phi(v)$$

Tournez la page S. V. P.

Montrer que :

a. v_n converge uniformément vers $\bar{v}$;

b. $\bar{v}$ appartient à C ;

c. $\bar{v}$ est le maximum de Φ sur C, c'est-à-dire :

$$\bar{v} = v^* .$$

II

On fait désormais l'hypothèse que F est dérivable par rapport à y et que la dérivée partielle $(x, y) \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}$.

On supposera que : $\sup_{v \in C} \Phi(v)$ est atteint en $v^* \in C$.

Le but de cette partie est de trouver des conditions nécessaires que doit satisfaire la fonction v^*.

1° En utilisant la concavité de F par rapport à v, montrer que :

$$\forall x \in I \quad \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y_1) - F(x, y_2) \leqslant \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_2)(y_1 - y_2).$$

2° En déduire que $x \longrightarrow v_0(x)$ est caractérisé par la condition :

$$\forall x \in I \left\{ y = v_0(x) \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$$

3° Pour h élément quelconque de C et $t \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\varphi(t) = \Phi(v^* + t\,h) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, v^*(x) + t\,h(x))\, dx.$$

a. Montrer que si φ est dérivable, sa dérivée en $t = 0$ ne peut être que négative ou nulle.

b. En déduire que : $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, h(x)\, dx \leqslant 0.$$

c. En prenant $h(x) \equiv 1$, montrer que :

(3) $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, dx = 0.$$

4° Soit $\bar{x}$ un point quelconque de I et $\varepsilon > 0$.

On pose :

$$\begin{cases} h_\varepsilon(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \bar{x} \\ \quad = \frac{1}{\varepsilon}(x - \bar{x}) & \text{si } \bar{x} < x < \bar{x} + \varepsilon \\ \quad = 1 & \text{si } x \geqslant \bar{x} + \varepsilon. \end{cases}$$

Déduire de la question 3° *b* la propriété suivante :

(4) $$\forall \bar{x} \in [x_0, x_1] \int_{\bar{x}}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, dx \leqslant 0$$

5° On pose, pour $t \in \mathbb{R}$: $\quad \psi(t) = \Phi[(1 - t)\, v^*]$

En s'inspirant des raisonnements précédents prouver la relation :

(5) $$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\, v^*(x)\, dx = 0.$$

III

On se propose de démontrer que les conditions nécessaires (3), (4), (5) établies dans la deuxième partie sont aussi suffisantes pour que v^* réalise le maximum de Φ sur C. Pour cela, on a besoin d'un résultat d'approximation que l'on démontrera dans la partie III. A, résultat que l'on utilisera dans la partie III. B pour démontrer que les conditions (3), (4), (5) sont suffisantes.

A.1° On définit une fonction ρ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant :

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 - 3t^2 + 2|t|^3 & \text{si } |t| \leqslant 1 \\ \quad = 0 & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

Montrer que :

a. ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;

b. ρ est à valeurs positives,

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\, dt = 1.$

A.2° Pour tout $v \in E$, $\varepsilon > 0$ et $x \in I$, on pose :

$$v_\varepsilon(x) = \int_{-1}^{1} \rho(s)\, \bar{v}(x - \varepsilon s)\, ds$$

Tournez la page S. V. P.

où : $\tilde{v}$ est défini par :
$$\begin{cases} \tilde{v}(t) = v(x_0) & \text{si } t < x_0 \\ \phantom{\tilde{v}(t)} = v(t) & \text{si } t \in I \\ \phantom{\tilde{v}(t)} = v(x_1) & \text{si } t > x_1 \end{cases}$$

Montrer que :

a. Si $v \in C$ alors $v_\varepsilon \in C$;

b. Quand $\varepsilon \to 0$, v_ε tend vers v, uniformément sur I;

c. $\forall x \in I \quad v_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right)\tilde{v}(t)\,dt$;

d. v_ε est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur de I.

A.3° En déduire que l'ensemble C_1, défini par :

$C_1 = \{ v \in C / v$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur de I $\}$, est dense dans C.

B. On considère maintenant $v^* \in C$ qui vérifie les conditions (3), (4), (5). On va montrer que :
$$\Phi(v^*) = \sup_{v \in C} \Phi(v)$$

B.1° En utilisant le résultat de la question II.1, établir que :

(6) $\quad \forall v \in E \quad \Phi(v) - \Phi(v^*) \leqslant \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, v^*(x))\,(v(x) - v^*(x))\,dx$

B.2° En intégrant par parties (après simplification) le second membre de (6), déduire des conditions (3), (4), (5) que :
$$\forall v \in C_1 \quad \Phi(v) - \Phi(v^*) \leqslant 0$$

B.3° En déduire que : $\quad \Phi(v^*) = \sup_{v \in C} \Phi(v)$

IV

On se propose de montrer l'existence de v^* et de le calculer explicitement dans le cas particulier suivant :
$$F(x, y) = y \cos x - \frac{1}{2} y^2, \text{ avec } I = [0, 2\pi].$$

1° Soit $v^* \in C$ un candidat à la maximisation de Φ sur C. On pose, pour $x \in I$:
$$V^*(x) = \int_0^x v^*(t)\,dt$$

a. On suppose dans un premier temps que v^* est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intérieur de I. Montrer que l'ensemble des conditions (3), (4), (5) équivaut à l'ensemble des trois conditions suivantes :

(3)' $\quad V^*(2\pi) = 0$

(4)' $\quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad V^*(x) \leqslant \sin x$

(5)' $\quad \displaystyle\int_0^{2\pi} (V^*(x) - \sin x)\frac{dv^*}{dx}(x)\,dx = 0$

b. On suppose désormais que v^* est seulement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. De plus, on adopte la convention suivante : en tout point x de $]0, 2\pi[$ où v^* n'est pas dérivable, on pose :
$$\frac{dv^*}{dx}(x) = 0.$$

Montrer que l'équivalence démontrée en *a.* reste valable.

2° Soit : $\quad I_1 = \left\{ x \in I / \dfrac{dv^*}{dx}(x) > 0 \right\}$

Montrer que : *a.* I_1 est un ouvert de I,

b. $\forall x \in I_1, \quad V^*(x) = \sin x$,

c. $\exists\, \alpha \in [\pi, 2\pi] / I_1 =]\alpha, 2\pi]$.

3° *a.* Montrer que v^* est constante sur $[0, \alpha]$.

b. En déduire que v^* est nécessairement telle que :
$$\begin{cases} v^*(x) = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} & \text{pour } x \in [0, \alpha] \\ = \cos x & \text{pour } x \in]\alpha, 2\pi], \end{cases}$$

où α est l'unique solution, sur $[\pi, 2\pi]$, de l'équation : $\tan\alpha = \alpha$.

c. Montrer que le v^* ainsi défini permet bien d'atteindre le maximum de Φ sur C.

ENSAE 1989

I Nombre de Rotations

1°) a) Si $f \in \mathcal{H}$, f est injective continue et possède puisqu'elle est croissante des limites l et l' en $-\infty$ et $+\infty$ resp.

On a : $l = -\infty$ en effet $f(x-1)+1 = f(x)$ donc $f(x-1) = f(x)-1$ et par récurrence sur $|n|$: $f(x+n) = f(x)+n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$. De là, $l = \lim_{n \to -\infty} f(n) = \lim_{n \to -\infty} (f(0)-n) = -\infty$.

On montre de même $l' = +\infty$

Enfin du fait que l'image de f est un intervalle, f est surjective
$\Rightarrow$ f est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, strict. croissante.

On sait alors que f^{-1} est continue ($\mathbb{R}$ est un intervalle) ; soit $y = f(x)$ un réel,
il vient $f^{-1}(y)+1 = x+1 = f^{-1}(f(x))+1 = f^{-1}(f(x+1)) = f^{-1}(y+1)$
donc : $f^{-1} \in \mathcal{H}$.

CONSEIL DE RÉDACTION : Il faut dans ce premier contact rappeler et utiliser quelques propriétés fondamentales des FVR, mais sans s'attarder.

b) $g \circ f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ par composition, ensuite, sur tout x réel : $g \circ f(x+1) = g(f(x+1)) = g(f(x)+1) = g(f(x))+1$
puisque g et f sont dans $\mathcal{H}$ $\square$

c) Comme : $id \in \mathcal{H}$, et que $\circ$ est associative, ceci résulte de a) et b).

d) $f - d$ est clairement continue strictement croissante et $(f-d)(x+1)$
$= f(x) - d + 1 = (f-d)(x)+1$.

Après quelques essais, on constate qu'il faut prouver :
$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $(f-p)^q = f^{q} - q.p$ (?) ce qui se fait bien entendu par récurrence en utilisant : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+n) = f(x)+n$:
Le résultat est vrai de $q=1$;
Si ce dernier est vrai de q, on a :

$$(f-p)^{q+1} = (f-p) \circ (f^{q} - qp) = f(f^{q} - qp) - p \quad \text{(y réfléchir!)}$$
$$= f^{q+1} - qp - p \quad (\text{car } f \in \mathcal{H})$$
$\square$

2°) a) Comme $f \in \mathcal{H}$, φ est manifestement 1-périodique et continue ; posons M = maximum de la fonction continue $|\varphi|$ sur le compact $[0,1]$, il vient par périodicité :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)| = |\varphi(x - E(x))| \leq M$, donc φ est bornée $\square$

b) $0 \leq M - m$: CREV. On note ensuite que, pour $0 < x < 1$,
$f(0) < f(x) < f(1) = f(0)+1$ puisque f est strictement croissante et $f \in \mathcal{H}$. Soient $x_0, y_0 \in [0,1]$ tels que $f(x_0) - x_0 = M$,

$f(y_0) - y_0 = m$, on suppose $x_0 \neq y_0$ (sinon...)

Raisonner par l'absurde, c'est décréter : $M \geq 1+m$.

1er cas : $x_0 < y_0$

Alors $f(x_0) - x_0 \geq 1 + f(y_0) - y_0$ d'où :

$f(x_0) \geq 1 + (x_0 - y_0) + f(y_0) \geq f(y_0)$ car $1 + x_0 - y_0 \geq 0$,

ce qui contredit : $f \uparrow$

2e cas : $x_0 > y_0$

Cette fois, $f(x_0) - x_0 \geq 1 + f(y_0) - y_0$ entraine

$f(x_0) \geq 1 + (x_0 - y_0) + f(y_0) > 1 + f(y_0) \geq 1 + f(0) = f(1)$

contradiction et résultat.

I - 3°) Les inégalités sont claires pour $q \in \{0, 1\}$. Soit q un entier ≥ 2, et x dans $[0, 1]$; posons : $y_k = f^k(x)$, $k = 1, \dots, q-1$.

Alors : $f^q(x) - x = \sum_{k=1}^{q-1} (f(y_k) - y_k) + f(x) - x$

donc : $f^q(x) - x \leq q \sup_{\mathbb{R}} (f(x) - x)$ et par suite :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (f^q(x) - x) \leq q \sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x) - x)$$

On montre de même l'autre inégalité.

!) || Pour trouver, il faut encore une fois essayer les petits cas !

I - 4°) Il est clair que $\mathcal{H}_0^+$, $\mathcal{H}_0^-$, $\mathcal{H}_0$ sont deux à deux disjoints.

D'un autre coté, pour f dans $\mathcal{H}$, la continuité de $f(x) - x$ impose à f d'appartenir à l'un de $\mathcal{H}_0^+$, $\mathcal{H}_0^-$, $\mathcal{H}_0$.

Enfin $id + 1 \in \mathcal{H}_0^+$, $id - 1 \in \mathcal{H}_0^-$ et $id \in \mathcal{H}_0$, CQFD.

5°) (1) Si $f \in \mathcal{H}_0^+$, et $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f^n(x))$ est croissante

$(f^n(x) > f^{n-1}(x) \Rightarrow f(f^n(x)) \geq f(f^{n-1}(x))$ et par hypothèse $f(x) > x)$

et non majorée, sans quoi elle convergerait vers un point fixe de f, ce qui n'est pas. Donc :

$(f^n(x))$ tend vers $+\infty$.

De même (2) Si $f \in \mathcal{H}_0^-$, $f^n(x)$ tend vers $-\infty$

) Ensuite si f possède au moins un point fixe x_0, il existe x_0 tel que $f^n(x_0)$ ne tende pas vers $+\infty$ ou $-\infty$

Il est clair que (a) $\Leftrightarrow f \in \mathcal{H}_0^+$ et (c) $\Leftrightarrow f \in \mathcal{H}_0^-$ viennent de (1), (2), (3).

(b) $\Rightarrow f \in \mathcal{H}_0^+$: $\{f \in \mathcal{H}_0^- \Rightarrow f^q \in \mathcal{H}_0^-$ | reste $f \in \mathcal{H}_0^+$. en sens inverse, si $f \in \mathcal{H}_0^+$ $f \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow f^q \in \mathcal{H}_0$

nous avons prouvé en (1) $x < f(x) < \dots < f^q(x)$ pour tout q d'où (b)

$f \in \mathcal{H}_0^- \Leftrightarrow$ (d) se fait de même.

Enfin si $f \in \mathcal{H}_0$, on a (c) donc (f) ; et si (f) est vérifiée, (b) entraîne $f \notin \mathcal{H}_0^+$, (d) entraîne $f \in \mathcal{H}_0^-$, donc $f \in \mathcal{H}_0$.

RÉDACTION : Le problème est long ; il ne faut pas s'attarder sur les détails de cette question facile - on peut y perdre beaucoup de temps - mais donner les preuves essentielles et poursuivre,

- 6°) a) Soit $\rho = \frac{p}{q}$ l'écriture irréductible de ρ, et $l \in \mathbb{N}^*$.

D'après I - 5°) - b) on a : $f^q - p \in \mathcal{H}_0^+ \Leftrightarrow (f^q - p)^l \in \mathcal{H}_0^+$; avec I - 1°) : $(f^q - p)^l = f^{ql} - pl$, donc : $f^q - p \in \mathcal{H}_0^+ \Leftrightarrow f^{ql} - pl \in \mathcal{H}_0^+$

ce qui montre bien que la définition de $\mathcal{H}_\rho^+$ est indépendante de l'écriture de ρ.

On procède de même avec $\mathcal{H}_\rho^-$ et $\mathcal{H}_\rho$

) De même qu'en 4°)

°) a) On réduit tout d'abord ρ et ρ' au même dénominateur, ce qui est licite d'après 6°) a) : $\rho = \frac{p}{q}$, $\rho' = \frac{p'}{q}$, avec $p < p'$

Soit f dans $\mathcal{H}_{\rho'}^+$.

On a, par hypothèse : $f^q - p > f^q - p' > id$ donc $f^q - p > id$ et $f \in \mathcal{H}_\rho^+$.

Soit f dans $\mathcal{H}_{\rho'}$. Il existe par hypothèse x réel tel que : $f^q(x) = p' + x$, donc : $f^q(x) - p > x$ et $f \notin \mathcal{H}_\rho^-$.

Si (par l'absurde) $f \in \mathcal{H}_\rho$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que : $f^q(y) - y = p$. Il vient alors, d'après 2°) - b), posant

$M = \sup_{x' \in \mathbb{R}} f^q(x') - x'$, $m = \inf_{x' \in \mathbb{R}} f^q(x') - x'$.

$1 > M - m \geq |(f^q(x) - x) - (f^q(y) - y)| = p' - p \geq 1$ car $p, p' \in \mathbb{Z}$

contradiction. donc $f \notin \mathcal{H}_\rho$

Il ne reste plus que la possibilité : $f \in \mathcal{H}_\rho^+$

L'inclusion : $\mathcal{H}_\rho^- \cup \mathcal{H}_\rho \subset \mathcal{H}_{\rho'}^-$ se traite par les mêmes méthodes.

°) b) Posons : $A = \{\rho \in \mathbb{Q} \mid f \in \mathcal{H}_\rho^+\}$ et $B = \{\rho \in \mathbb{Q} \mid f \in \mathcal{H}_\rho^-\}$

Ainsi que : $m = \min_{x \in \mathbb{R}} (f(x) - x)$, $M = \max_{x \in \mathbb{R}} (f(x) - x)$

Si l'entier relatif p vérifie : $m > p$, on a : $f - p > id$ donc : $\frac{p}{1} \in A$.

Si l'entier relatif p' vérifie : $p' > M$ on a : $f - p' < id$ donc : $\frac{p'}{1} \in B$

Ainsi (i) <u>A et B sont non vides.</u> ④

ii) <u>Si $\rho \in A$ et $\rho' \in B$ on a : $\rho < \rho'$</u>

Sinon ($\rho' < \rho$ et $f \in \mathcal{H}_{\rho'}^-$) $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{H}_\rho^-$ $\Rightarrow f \notin \mathcal{H}_\rho^+$ (7°/a) et 6°/b))

: qui est stupide.

iii) <u>Si $\rho \in A$, $\rho' \in B$, $(\rho_1, \rho_1') \in \mathbb{Q}^2$ et : $\rho_1 < \rho$, $\rho' < \rho_1'$ on a : $\rho_1 \in A$ et $\rho_1' \in B$</u>

En effet, $(f \in \mathcal{H}_\rho^+$ et $\rho_1 < \rho) \Rightarrow f \in \mathcal{H}_{\rho_1}^+ \Rightarrow \rho_1 \in A$, de même $\rho_1' \in B$.

On pose maintenant : $\underline{\rho(f) = \sup A}$ (cf. coupures)

Si $\rho_1 \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, \rho(f)[$, il existe par définition de la borne supérieure ρ dans A tel que : $\rho_1 < \rho \leq \rho(f)$, avec (iii) : $f \in \mathcal{H}_{\rho_1}^+$.

De même ; $\forall \rho \in]\rho(f), +\infty[\cap \mathbb{Q}$, $f \in \mathcal{H}_\rho^-$. $\square$

<u>8°) a)</u> Supposons $\rho < \rho'$. Comme avec 7°/a) : $f \in \mathcal{H}_\rho \Rightarrow f \in \mathcal{H}_{\rho'}^-$ on a : $\rho' \geq \rho(f)$. Donc $\rho \geq \rho(f)$.

Si $\rho > \rho(f)$, c'est que $f \in \mathcal{H}_\rho^-$ ce qui est exclu donc : $\underline{\rho(f) = \rho}$

b) Raisonnons par l'absurde en supposant par exemple :

$\rho = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{H}_\rho^+$.

La définition fournit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^q(x) - p - x \geq m > 0$, $(m = \min_{\mathbb{R}}(f^q - p - id))$

avec I - 3°) nous obtenons pour $l \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f^q - p)^l(x) - x \geq lm$$

soit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{ql} - pl - x \geq lm$.

Pour $l > \frac{1}{m}$ il vient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{ql} - (pl + 1) - x > 0$

donc : $f \in \mathcal{H}_{\rho'}^+$ avec $\rho' = \frac{pl + 1}{ql} > \rho$.

contradiction et résultat.

<u>9°) a)</u> Clair pour $k = 0$; pour $k \geq 1$, posons : $p_k = [k\rho(f)]$

- Si $\rho(f) > \frac{p_k}{k}$ il vient : $f \in \mathcal{H}_{p_k/k}^+$ donc, pour tout x :

$f^k(x) - x - p_k > 0$ et a fortiori : $f^k(x) - x - k\rho(f) > -1$

- Si $\rho(f) = \frac{p_k}{k}$ alors $f \in \mathcal{H}_{\frac{p_k - 1}{k}}^+$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^k(x) - x - (p_k - 1) > 0$ soit : $\forall x$, $f^k(x) - k\rho(f) - x > -1$

...ntrons ensuite $\rho(f^{-1}) = -\rho(f)$ $(*)$

...our ceci il suffit de prouver : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{H}^+_{\frac{p}{q}} \iff f^{-1} \in \mathcal{H}^-_{-\frac{p}{q}}$

...n remarquant : f^q est bijective,

...e avait : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^q(x) - x - p > 0$

$\iff \forall y \in \mathbb{R}$, $y - (f^{-1})^q - p > 0$ $\quad (y = f^q(x))$

$\iff \forall y \in \mathbb{R}$, $(f^{-1})^q y - (-p) < 0 \iff f \in \mathcal{H}^-_{-\frac{p}{q}}$ $\square$

Avec $(*)$ et le début de I-1°) a), nous obtenons :

$\forall k \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 < f^{-k}(x) - x - k\rho(f^{-1}) < 1$ soit,

$\quad$, $\quad$, $-1 < f^{-k}(x) - x - (-k)\rho(f) < 1$ $\square$

2°) Provient, à x fixé, de : $-\frac{1}{k} < \frac{f^k(x)}{k} - \frac{x}{k} - \rho(f) < \frac{1}{k}$ $\quad (k \geq 1)$

et d'un passage à la limite; de même avec $k < 0$ $\square$

II

1°) $\forall x$, $t_d(x+1) = t_d(x) + 1$ et t_d est clairement un homéomorphisme croissant.

Ensuite, $\rho(t_d) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{t_d^k(0)}{k} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{kd}{k} = d$.

2°) On a $(k \neq 0)$

$\rho(f^k) = \lim\limits_{l\to+\infty} \frac{(f^k)^l(0)}{l} = k \lim\limits_{l\to+\infty} \frac{f^{kl}(0)}{kl} = k\rho(f)$; et $\rho(id) = 0$

d'où le premier point. Le second se traite de même; avec :

$(f+k)^n(0) = f^n(0) + nk$ on trouve : $\rho(f+k) = \rho(f) + k$

3°) Il suffit de prouver :

$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{H}^+_{\frac{p}{q}} \Rightarrow g \in \mathcal{H}^+_{\frac{p}{q}}$. Montrons d'abord que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k \leq g^k$

Le résultat est vrai de $k=1$, et si $f^k \leq g^k$ la croissance de f impose : $f(f^k) \leq f(g^k)$ et comme $f \leq g$, $f(g^k) \leq g^{k+1}$

donc $f^{k+1} \leq g^{k+1}$ $*$

Maintenant, si $f^q - p - id > 0$, $g^q - p - id \geq f^q - p - id > 0$

donc $g \in \mathcal{H}^+_{\frac{p}{q}}$ $\square$

4°) D'après I-1°) $(\mathcal{H}, \circ)$ est un groupe donc $h \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{H}$

Lorsque $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, on a les équivalences suivantes :

$\forall x$, $f^q(x) > x + p \iff \forall x$, $f^q(h(x)) > h(x) + p$ (car h est bijective)

$\iff \forall x$, $h^{-1}(f^q(h(x))) > x + p$

(car $h^{-1} \in \mathcal{H}$: $h^{-1}(u+p) = h^{-1}(u) + p$ et h ↑)

$\Leftrightarrow \forall x,\ (h^{-1}\circ f\circ h)^q(x) > x+p$ et donc :

Ainsi $\forall (p,q)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $f\in \mathcal{H}^+_{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow h^{-1}\circ f\circ h\in \mathcal{H}^+_{\frac{p}{q}}$

$\rho(f) = \rho(h^{-1}\circ f\circ h)$

6°) a) Si $\alpha\in\mathcal{H}$, $\alpha(x)-x$ est 1-périodique et continue donc uniformément continue (on use de ce que $\alpha - id_{|[0,1]}$ est uniformément continue d'après le théorème de Heine), par suite : α est uniformément continue. (A RETENIR, SI POSSIBLE)

Soit ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. Il existe avec ce qui précède η dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

puis $n_0\in\mathbb{N}$ vérifiant :

$\forall n\geq n_0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ et $|g(x)-g_n(x)|<\eta$.

De là, pour tout x réel et tout entier $n\geq n_0$: $|g_n(x)-g(x)|<\eta$ donc

$|f\circ g(x) - f_n\circ g_n(x)| \leq |f(g(x)) - f(g_n(x))| + |f(g_n(x)) - f_n(g_n(x))|$

$\leq 2\varepsilon$ $\square$

6°) b) Soit p un entier >0. Il existe un entier $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que (6°a)) :

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_\varepsilon \Rightarrow f^p-1\leq f_n^p\leq f^p+1$ Avec 2°) et 3°) :

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_\varepsilon \Rightarrow \rho(f^p)-1\leq\rho(f_n^p)\leq\rho(f^p)+1$, or : $\rho(g^p)=p\rho(g)$

~~il vient donc~~ $\forall n\geq n_\varepsilon$, $\rho(f)-\frac{1}{p}\leq\rho(f_n)\leq\rho(f)+\frac{1}{p}$ $\square$

III

1°) F, comme f, est strictement croissante. De là, pour tout x réel, $F^n(x)$ est monotone (croissante si $F(x)\geq x$, décroissante sinon), de même pour $F^{-n}(x)$.

Avec II, $\rho(F) = q\rho(f)-p=0$, enfin I - 9°) a) nous dit que : $\forall n\in\mathbb{Z},\ -1<F^n(x)-x<1$

donc $(F^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée

Bilan : $(F^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F^{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones bornées donc convergentes, comme F et F^{-1} sont continues, elles convergent vers un point fixe de F (les points fixes de F sont ceux de F^{-1}).

2°) a) Il suffit de montrer que I et I' sont injectives.

Si $I(p,q)=I(p',q')$, $(q-q')\rho = p'-p$; $q-q'\neq 0$ entraîne

$\rho=\frac{p'-p}{q-q'}\in\mathbb{Q}$ ce qui est exclu donc $q=q'$ et $p=p'$

Si $f^{q}(x_0)+p = f^{q'}(x_0)+p'$, en appliquant l'élément f^{-q} de $\mathcal{H}$ à l'égalité précédente il vient :

$$f^{q'-q}(x_0) - (p-p') - x_0 = 0 .$$

Supposons $q'-q \geq 1$, il vient alors : $f \in \mathcal{H}_\rho$ avec $\rho = \frac{p-p'}{q'-q}$

Comme $\rho(f)$ est irrationnel, on a soit :

$\rho < \rho(f)$ et alors $f \in \mathcal{H}_\rho^+$, c'est absurde

$\rho > \rho(f)$ et alors $f \in \mathcal{H}_\rho^-$, bis.

Donc $q'-q = 0$ et $p = p'$ $\square$

) g est bijective par composition, de façon explicite

$$g(p+q\rho) = f^{q}(x_0) + p .$$

Si $p+q\rho > p'+q'\rho$, on distingue deux cas :

1^{er} cas. $q > q'$. alors $\rho > \frac{p'-p}{q-q'}$ donc $f \in \mathcal{H}^+_{\frac{p'-p}{q-q'}}$ ce qui se traduit par : $f^{q-q'}(x_0) - (p'-p) > x_0$, en appliquant l'élément $f^{q'}$ de $\mathcal{H}$ ($f^{q'}$ $\uparrow$ etc...) $f^{q}(x_0)+p > f^{q'}(x_0)+p'$

2^{e} cas $q \leq q'$: Si $q = q'$ tout est clair ; sinon,

$\frac{p-p'}{q'-q} > \rho$ donc $f \in \mathcal{H}^-_{\frac{p-p'}{q'-q}}$ et : $f^{q'-q}(x_0) - (p-p') < x_0$

à nouveau : $f^{q'}(x_0)+p' < f^{q}(x_0)+p$ $\square$

2) On peut tout faire facilement à l'aide du cours : sous-groupes de $\mathbb{R}$, ou encore avec le principe d'approximation de Dirichlet

Tout ceci est laissé au lecteur ...

2)(*) Si $x' \geq x$, $h(\Lambda' \cap]-\infty, x]) \subset h(\Lambda' \cap]-\infty, x'])$ donc $\bar{h}(x') \geq \bar{h}(x)$. D'autre part, si $x \in \Lambda'$ la croissance de h assure que $h(x) = \max\{h(y) \mid y \in]-\infty, x] \cap \Lambda'\}$
$= \bar{h}(x)$.

Continuité de $\bar{h}$: Soit x un réel, et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. Choisissons par densité de Λ z et z' dans Λ tels que : $\bar{h}(x)-\varepsilon < z < \bar{h}(x) < z' < \bar{h}(x)+\varepsilon$

Du fait que h est bijective nous pouvons trouver y et y' dans Λ' tels que : $h(y) = z$, $h(y') = z'$.

Si $y \geq x$, $h(y) = h(y) \geq \bar{h}(x)$ soit $z \geq \bar{h}(x)$: absurde. On a donc : $y < x < y'$.

(*) $\bar{h}$ est finie car pour tout x réel il existe $z \in \Lambda'$ tel que : $z > x$ d'où $h(z)$ majore $h(]-\infty, x] \cap \Lambda')$

Maintenant, pour tout x' de $[y, y']$:

$$z = h(y) = \bar{h}(y) \leq \bar{h}(x') \leq \bar{h}(y') = h(y') = z'$$ soit, à fortiori

$$\bar{h}(x) - \varepsilon < \bar{h}(x') < \bar{h}(x) + \varepsilon \quad \square$$

b) On a : $\bar{h}(x+1) = \sup\{p + q\rho \mid f^q(x_0) + p < x+1\}$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$

$$= \sup\{(p' + q\rho) + 1 \mid f^q(x_0) + p' < x\} \quad p', q \in \mathbb{Z}$$

$$= \bar{h}(x) + 1$$

et $\bar{h}(f(x)) = \sup\{p + q\rho \mid f^q(x_0) + p < f(x_0)\}$

$$= \sup\{p + q'\rho + \rho \mid f^{q'+1}(x_0) + p < f(x_0)\} \quad p, q' \in \mathbb{Z}$$

$$= \sup\{p + q'\rho + \rho \mid f^{q'}(x_0) + p < x_0\} \quad \text{car } f^{-1} \in \mathcal{H}$$

$$= \bar{h}(x) + \rho.$$

c) l'image de l'application continue $\bar{h}$ est un intervalle contenant la partie dense Λ donc : $\bar{h}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme $\bar{h}(x+1) = \bar{h}(x) + 1$ il ne reste plus qu'à prouver :

<u>$\bar{h}$ est strictement croissante</u>.

Soit $x < x'$ dans $\mathbb{R}$, par densité de Λ' on peut trouver y et y' dans Λ' tels que : $x < y < y' < x'$

de là : $\bar{h}(x) \leq \bar{h}(y) = h(y) < h(y') = \bar{h}(y') \leq \bar{h}(x')$

donc : $\bar{h}(x) < \bar{h}(x') \quad \square$

IV

CARACTÉRISATION DES HOMÉOMORPHISMES MINIMAUX DE S^1

1°) On a : $e^{2i\pi x} \neq e^{2i\pi x_0}$ donc par injectivité de F :

$F(e^{2i\pi x}) \neq e^{2i\pi x_0'}$, comme $\varphi_2 :]x_0', x_0'+1[\xrightarrow{e^{2i\pi \cdot}} S \setminus \{e^{2i\pi x_0'}\}$ est bijection, il existe un unique $x' \in]x_0', x_0'+1[$ tel que :

$F(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi x'}$

- Si φ_1 est l'homéomorphisme : $x \to e^{2i\pi x}$, $]x_0, x_0+1[\to S \setminus \{e^{2i\pi x_0}\}$ on a : $f(x) = \varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ donc f est continue et injective par composition. La source de f étant un intervalle de $\mathbb{R}$, f est strictement monotone.

2°) f étant monotone bornée sur $]x_0, x_0+1[$ possède une limite à droite en x_0, et à gauche en x_0+1. d'où le [illegible]longement de f par continuité.

Il vient alors, par passage à la limite dans : $F(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi f(x)}$

[illegible] $\in]x_0, x_0+1[$: $F(e^{2i\pi x_0}) = e^{2i\pi f(x_0+1)} = e^{2i\pi f(x_0)}$

soit : $e^{2i\pi x_0'} = e^{2i\pi f(x_0+1)} = e^{2i\pi f(x_0)}$

[illegible] comme $x_0' < f(x) < x_0'+1$: $f(x_0), f(x_0+1) \in [x_0', x_0'+1]$

De là deux cas

1er cas : $f \downarrow$. Alors : $f(x_0) = x_0'+1$, $f(x_0+1) = x_0'$,
$f(x_0+1) = f(x_0) - 1$

2e cas : $f \uparrow$ Alors $f(x_0) = x_0'$, $f(x_0+1) = x_0'+1$
$f(x_0+1) = f(x_0)+1$

2°) Supposons : $f \uparrow$. Lorsque $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\hat{f}(x) = f(x - E(x-x_0)) + E(x-x_0)$$

Par composition, $\hat{f}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus (x_0+\mathbb{Z})$

Reste à prouver la continuité de $\hat{f}$ en un point x_0+p de $x_0+\mathbb{Z}$.

Mais, par définition de $\hat{f}$:

$$\exists \lim_{x \to (x_0+p)^+} \hat{f}(x) = f(x_0)+p = \hat{f}(x_0+p)$$

et

$$\exists \lim_{x \to (x_0+p)^-} \hat{f}(x) = f(x_0+1)+p-1 = f(x_0)+p = \hat{f}(x_0+p)$$

De même dans le cas $f \downarrow$.

Pour l'unicité, on note que la condition :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2i\pi f(x)} = e^{2i\pi g(x)}$ entraine : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$

Comme $\mathbb{R}$ est connexe et $f-g$ continue, $f-g$ est constante,

enfin $f(x_0+\frac{1}{2}) = g(x_0+\frac{1}{2})$ entraine $f \equiv g$ ◻

3°) (2) et (3) résultent immédiatement de 2°) et 3°)

4°) On pose : $F(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi x}$.

F est ainsi bien définie : si $e^{2i\pi x} = e^{2i\pi x'}$, $x - x' \in \mathbb{Z}$

donc $x' = x+p$, $p \in \mathbb{Z}$ et $f(x') = f(x)+p$ ce qui entraine

$e^{2i\pi f(x)} = e^{2i\pi f(x')}$

F est continue : par composition ;

F est surjective : car f et φ le sont ;

F est injective : si $F(x) = F(x')$, $e^{2i\pi f(x)} = e^{2i\pi f(x')}$

donc $f(x') - f(x) \in \mathbb{Z}$ cad, $\exists p \in \mathbb{Z}$, $f(x') = f(x) + p$.

Il vient alors : $f(x') = f(x+p)$ et comme f est injective :

$x' = x + p$, ce qui entraine : $e^{2i\pi x'} = e^{2i\pi x}$ □

Ainsi, F est une bijection continue de S^1 vers S^1

comme S^1 est compact, F est un homéomorphisme.

(CLASSIQUE !)

l'unicité de F vient de la surjectivité de φ.

6°) b) vient de la 1-périodicité de $\exp(2i\pi\cdot)$

a) $F(F(x)) = F(e^{2i\pi f(x)}) = e^{2i\pi f^2(x)}$; une récurrence facile achève alors le cas de $p \in \mathbb{N}^*$, pour conclure on remplace f par f^{-1} et F par F^{-1}.

7°) a) Si $\rho(f)$ est rationnel, avec I-8°)-b), $f \in \mathcal{H}_p$ et donc il existe x_0 tel que : $f^q(x_0) = x_0 + p$, d'où :

$F(\varphi(x_0)) = e^{2i\pi f^q(x_0)} = e^{2i\pi(x_0+p)} = e^{2i\pi x_0}$, so $X_0 = e^{2i\pi x_0}$

$$F^q(x_0) = x_0$$

b) avec les notations de III : Λ' est dense dans $\mathbb{R}$

En effet, si $\left[\begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \\ \varphi \end{array}\right.$ est la restriction de $e^{2i\pi\cdot}$ à $]0,1[$ et $S\setminus\{1\}$

$\varphi^{-1}\langle\{F^k(x_0)\}\rangle = \{ f^k(x_0) - [f^k(x_0)] \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $]0,1[$ et contenu dans $\Lambda' \cap]0,1[$, donc : $[0,1] \subset \overline{\Lambda'}$

$\overline{\Lambda'}$ est visiblement invariant par translation donc : $\overline{\Lambda'} = \mathbb{R}$

Avec III - 4°) et 5°), il existe $\bar{h} \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \bar{h} \circ f \circ \bar{h}^{-1}(x) = x + \rho$$

Posons : $H(e^{2i\pi x}) = e^{2i\pi \bar{h}(x)}$; d'après 5°) H est un homéomorphisme de S^1 et l'on a :

$\forall x$, $e^{2i\pi(x+\rho)} = e^{2i\pi \bar{h}(f(\bar{h}^{-1}(x)))} = H \circ F \circ H^{-1}(e^{2i\pi x})$

soit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(e^{2i\pi x}) = H^{-1} \circ R_\alpha \circ H(e^{2i\pi x})$, $\alpha = \rho$.

enfin ρ est irrationnel sinon avec a) F possède un point périodique x_0 et $(F^k(x_0))_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans S, EXCLU

◻